

Área das pétalas de uma flor utilizando coordenadas polares

Jucy Saraiva Sindeaux¹

Joyce Saraiva Sindeaux²

RESUMO: O presente trabalho aborda a necessidade do uso das coordenadas polares, mostrando sua aplicação no cálculo de áreas, especificamente no caso das pétalas de uma flor. Além de falar um pouco sobre o desenvolvimento da sua história e apresentar sua definição, o trabalho tem o intuito de mostrar, através de um exemplo, como calcula-se a área dos objetos presentes no dia a dia que possuem a forma arredondada, por meio das chamadas coordenadas polares. O exemplo apresenta o cálculo da área da região delimitada pela curva $r = 2\sin(5\theta)$. Por fim, é possível observar que a utilização das coordenadas polares transforma o método de integração mais simples, sendo este muitas vezes impossível se for feito por meio do uso de coordenadas cartesianas.

Palavras-chave: Área; Coordenadas Polares; Integração.

1 Introdução

Tem-se que um *sistema de coordenadas polares* $O\rho\theta$ nada mais é do que uma forma de representar pontos por dois parâmetros, digamos $P = (\rho, \theta)$, onde ρ denota a distância da origem do sistema O ao ponto P , e θ é a medida do ângulo do eixo polar, para uma semi-reta. Assim escreve-se como:

$$P = (\rho, \theta)$$

onde (ρ, θ) é a notação para o ponto P , no sistema de coordenadas polares. (Para mais detalhes veja a seção 13.7 de (GUIDORIZZI, 2001)).

Este sistema de coordenadas foi inicialmente introduzido no cálculo de áreas por Cavalieri, para resolver um problema de espiral arquimediana.

Isaac Newton foi o primeiro a fazer uso das coordenadas polares para encontrar qualquer ponto no plano. Ele analisou este sistema e mais outros nove.

De acordo com (Portal São Francisco, 2017), Jacob Bernoulli utilizou um sistema com uma linha e um ponto, chamado de eixo polar e pólo, respectivamente. Após isto,

¹ E.E.F.T.I Antônio de Figueiredo Taveira, e-mail: jucysaraiva20@gmail.com

² Universidade Regional do Cariri, e-mail: joyce.sindeaux@urca.br

passaram a fazer cálculos de raios de curvaturas, utilizando estas novas coordenadas, que no século XVIII, passou a ser reconhecido e usado por escritores italianos como sendo "**coordenadas polares**".

Sabe-se que alguns objetos não possuem a forma convencional, que não assemelham-se à um quadrado, retângulo ou triângulo, e sim, um formato um pouco mais arredondado, como é o caso das flores (veja Figura 1), que necessitam de uma aplicação um pouco diferente das usuais, para se calcular área, comprimento, entre outras. Em casos como esse, é comum fazer uso das coordenadas polares para facilitar o processo de integração. Esse será o objeto desse trabalho, apresentar as ferramentas necessárias para calcular a área de uma flor por meio das coordenada polares.

2 Metodologia

A abordagem metodológica deste trabalho compreende a revisão bibliográfica de parte da obra intitulada *Um curso de cálculo vol.1* do Hamilton Luiz Guidorri (GUIDORIZZI, 2001).

3 Fundamentação teórica

O trabalho trata de um tema clássico em Cálculo Diferencial e Integral. Para abordá-lo fazemos uso dos conceitos básico de integração, fundamentadas na teoria apresentada por (GUIDORIZZI, 2001).

Como já abordado anteriormente, sabe-se que alguns objetos não possuem a forma convencional, ou seja, não são formados apenas por linhas retas, esses objetos podem ter formato um pouco mais arredondado, como é o caso das flores. Para calcular a área ou comprimento desse tipo de objeto é necessário uma aplicação um pouco diferente das usuais.

Pensando nisso, foi utilizado o processo de integração para calcular a área da seguinte flor, dada abaixo:



Figura 1 – Flor com cinco pétalas

Foi feito uso das coordenadas polares, pois elas são utilizadas para representar as formas cotidianas que possuem formatos arredondados e que não seria possível, ou ficaria bem

mais complicado, se fossem calculadas a área ou o comprimento, por exemplo, utilizando coordenadas cartesianas.

Esse sistema de coordenadas permite-se fazer uso dos métodos algébricos, para compreender melhor a geometria.

Vamos, então, formalizar a definição de coordenadas polares. Fixado um ponto O no semieixo Ox , chamamos esse eixo de *eixo polar* e o ponto O de *polo*. Daí, cada ponto P do plano fica determinado por suas *coordenadas polares* (θ, ρ) sendo θ a medida em radianos do ângulo entre o segmento OP e o eixo polar (tal ângulo sendo medido a partir do eixo polar e no sentido antihorário) e ρ o comprimento do segmento OP , veja figura abaixo.

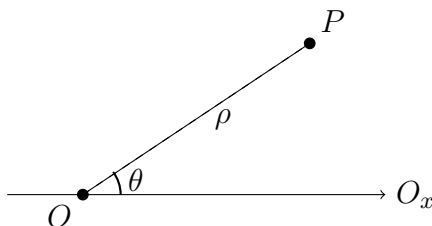


Figura 2 – Coordenadas Polares do ponto P

Se considerarmos no plano um sistema de coordenadas cartesianas usual, fazendo a origem coincidir com o polo e o semieixo Ox com o eixo polar. Denotando por (θ, ρ) as coordenadas polares de P , então as coordenadas cartesianas de P serão dadas por $P = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

Percebe-se, que a flor apresentada na Figura 1 assemelha-se ao gráfico em coordenadas polares referente a curva $r = 2 \sin(5\theta)$ (representado na Figura 3), pois possuem o mesmo número de pétalas, a mesma simetria referente ao eixo $\frac{\pi}{2}$, e de comprimento igual para cada pétala com, aproximadamente, dois centímetros.

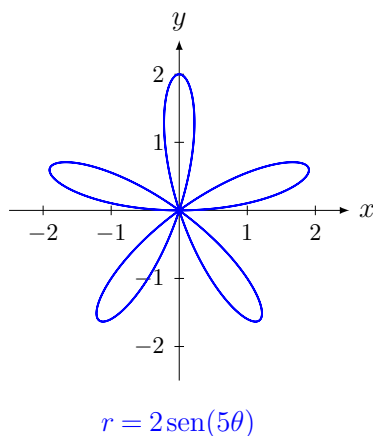


Figura 3 – Gráfico da equação $r = 2 \sin(5\theta)$

Essa figura em questão é a representação de uma rosácea. Existem várias formas que estas podem assumir. Em relação as flores, (MADELA, 2014) afirma que uma "orquídea perfeita" deve assemelhar-se a uma rosácia de 6 pétalas.

4 Resultados

Como é observado em (GUIDORIZZI, 2001), temos que a área de uma região, cujo gráfico é dado em coordenadas polares é dada por

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

Assim, substituindo a função e os intervalos de integração dadas no exemplo da Figura 3, o resultado decorrente foi:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 \operatorname{sen}(5\theta))^2 d\theta \\ &= \frac{2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \operatorname{sen}(5\theta))^2 d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \operatorname{sen}^2(5\theta) d\theta \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2(5\theta) d\theta \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos(10\theta)) d\theta \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(10\theta)) d\theta \\ &= 2 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(10\theta) d\theta \right] \\ &= 2 \left[\theta - \frac{\operatorname{sen}(10\theta)}{10} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen}(5\pi)}{10} - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen}(-5\pi)}{10} \right) \right] \\ &= 2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen}(5\pi)}{10} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen}(5\pi)}{10} \right) \right] \\ &= 2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen}(5\pi)}{10} + \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen}(5\pi)}{10} \right] \\ &= 2 \left[\pi - \frac{\operatorname{sen}(5\pi)}{5} \right] \quad u.a. \end{aligned}$$

Conclui-se, então, que é possível calcular a área da flor escolhida fazendo uso da integração, através das curvas em coordenadas polares, e a área da mesma é

$$A = 2 \left[\pi - \frac{\operatorname{sen}(5\pi)}{5} \right] \quad u.a.$$

5 Considerações Finais

Usar o método de coordenadas polares para o cálculo de áreas de figuras arrendodadas simplifica o cálculo das integrais. Sendo este muitas vezes impossível se for feito por meio de coordenadas cartesianas.

Referências

GUIDORIZZI, H. Um curso de cálculo 1, volume 1. 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

MADELA, T. O Sistema de Coordenadas Polares e sua inserção no ensino básico através de projetos. [S.l.]: (Dissertação) UFMS, 2014.

Portal São Francisco. Coordenadas Polares. 2017. Acessado em: 15 novembro 2024. Disponível em: <<https://www.portalsaofrancisco.com.br/matematica/coordenadas-polares>>.